

1 ทบทวน

ตัวอย่าง. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $y = \frac{x}{x-1}$

2. $y = \frac{x^2}{x+1}$

3. $y = e^{x^2+10}$

4. $y = e^{x^2-5x+3}(x+1)$

5. $y = (x+1)^4 + 5x(\sin x^2)$

ตัวอย่าง. หาอนุพันธ์ของ y เทียบกับ x ของความสัมพันธ์ $x^2 + y^2 = 25$

1. เส้นสัมผัสที่จุดใดบ้างของกราฟ $C : x^2 + y^2 = 25$ ที่มีความชันเป็น 1

2. เขียนสมการทั่วไปของเส้นสัมผัสกราฟ C ที่จุด (x_0, y_0) ใด ๆ พร้อมทั้งแสดงให้เห็นว่าเส้นตั้งฉากเส้นสัมผัส ผ่านจุดศูนย์กลางเสมอ

ตัวอย่าง. หา $\frac{dy}{dt}$ เมื่อทราบว่า

$$y^3 + 2x^2y + 4x^3 + 5xy^2 = 0 \text{ และ } x = t^2 + 3t$$

2 อัตราสัมพัทธ์

โจทย์ปัญหา 2.1

วัตถุหนึ่งเคลื่อนที่ไปตามแนวแกน x ที่เวลา t ใด ๆ วัตถุนั้นจะมีตำแหน่งเป็นไปตามสมการ $x(t) = \frac{t^4}{2} - 5t^3 + 18t^2 - 28t$ จงอธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุจากเวลา $t = 0$ ถึง $t = 5$

1. ที่เวลาใดบ้างที่วัตถุหยุดนิ่ง
2. วัตถุไปห่างจากจุดเริ่มต้นได้ไกลสุด เป็นระยะเท่าใด

โจทย์ปัญหา 2.2

นักบินอวกาศทดลองโยนลูกเหล็กขึ้นไปตรง ๆ บนดาวเคราะห์ดวงหนึ่ง ลูกเหล็กเคลื่อนที่เป็นไปตามสมการ $y(t) = 12t - 3t^2$ เมตร

1. ลูกเหล็กไปได้ไกลจากพื้นมากที่สุดกี่เมตร
2. ณ เวลา $t = 1$ ลูกเหล็กอยู่ที่ตำแหน่งใด มีความเร็วเท่าใด ไปทิศทางใด
3. ความเร่งของการเคลื่อนที่เป็นเท่าใดบนดาวดวงนี้

โจทย์ปัญหา 2.3

บันไดยาว 10 เมตรวางพิงกำแพงอยู่ ปลายล่างของบันไดกำลังไถลออกจากตัวตึกด้วยอัตราเร็ว 3 เมตรต่อวินาที

1. จงหาความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วของปลายล่าง และความเร็วของปลายบนของบันได
2. ถ้าปลายล่างของบันไดอยู่ห่างจากตัวตึก 6 เมตร ปลายบนของบันไดจะมีความเร็วเท่าใด

โจทย์ปัญหา 2.4

การถ่ายทอดสไลด์การปล่อยจรวด ต้องปรับองศาของกล้องอยู่ตลอดเพื่อให้ทันกับจรวด ถ้ากล้องอยู่ห่างจากจุดปล่อย 5 กิโลเมตร และจรวดอวกาศกำลังเคลื่อนที่ขึ้นด้วยความเร็วคงที่ 500 เมตรต่อวินาที กล้องจะต้องหมุนด้วยความเร็วเท่าไร เมื่อจรวดอยู่สูงจากจุดปล่อย 2 กิโลเมตร

โจทย์ปัญหา 2.5

รินเปียร์ใส่แก้วเปียร์รูปทรงกรวย ปากแก้วมีรัศมี 5 เซนติเมตร สูง 20 เซนติเมตร ถ้ารินเปียร์ด้วยอัตราคงที่ 50π ลบ.ซม. ต่อวินาที ลงในแก้วเปียร์

1. อัตราการเปลี่ยนความสูงของเปียร์เป็นเท่าไรเมื่อเปียร์ในแก้วสูง 15 เซนติเมตร
2. คิดโจทย์ปัญหาข้อนี้ใหม่ เมื่อแก้วเปียร์เป็นทรงกรวยตัดยอด รัศมีขอบบน 5 เซนติเมตร รัศมีขอบล่าง 2 เซนติเมตร และสูง 30 เซนติเมตร

โจทย์ปัญหา 2.6

เครื่องยนต์ในรถยนต์ทำงานโดยบีบอัดแก๊สในกระบอกสูบ ก่อนจะจุดประกายไฟให้แก๊สระเบิดและปลดปล่อยพลังงานออกมา สมมติให้เริ่มต้นปริมาตรของกระบอกสูบเป็น 600 ลบ.ซม. ที่ความดัน 1 บรรยากาศ ทันใดนั้นลูกสูบก็บีบอัดอากาศในกระบอกสูบให้ลดลงด้วยอัตรา 8000 ลบ.ซม.ต่อวินาที จงหาว่าความดันในกระบอกสูบเปลี่ยนไปเท่าไร โดยใช้กฎของบอยล์ที่ว่า ผลคูณของปริมาตรและความดันของแก๊สเป็นค่าคงที่ นั่นคือ

$$PV = k$$

เมื่อ P แทนความดันของแก๊ส V แทนปริมาตรของแก๊ส และ k เป็นค่าคงที่

3 การเขียนกราฟ

โจทย์ปัญหา 3.1

หาค่าสูงสุดและต่ำสุดของกราฟ $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 6$ บนช่วง $[-3, 3]$

โจทย์ปัญหา 3.2

จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 28$$

โจทย์ปัญหา 3.3

จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน

$$f(x) = \frac{x}{x-1}$$

โจทย์ปัญหา 3.4

จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน

$$f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$$

4 ปัญหาค่าขอบ

โจทย์ปัญหา 4.1

ต้องการทำกล่องกระดาษโดยที่ก้นกล่องเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส แต่ทว่ามีกระดาษลังเพียง 10 ตารางเมตร กล่องปริมาตรมากที่สุดที่เราสามารถสร้างได้เป็นเท่าไร

1. พิจารณาข้อนี้อีกครั้ง โดยที่กล่องไม่มีฝาปิด

โจทย์ปัญหา 4.2

จะทำรั้วปิดล้อมพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่อยู่ริมแม่น้ำโดยให้รั้วยาว 500 ฟุต พื้นที่ที่มากที่สุดที่ล้อมได้เป็นเท่าไร

1. พิจารณาข้อนี้อีกครั้ง ถ้าพื้นที่ที่จะปิดล้อมติดกับถนนรูปตัว L (ไม่ต้องปิดล้อมสองด้าน)

โจทย์ปัญหา 4.3

ต้องการสร้างกล่องปริมาตร 20 ลูกบาศก์เมตร ที่ความยาวของฐานกล่องเป็น 2 เท่าของความกว้างของฐานกล่อง ถ้าราคาวัสดุทำฝาปิดและพื้นกล่องราคา 20 บาทต่อตารางเมตร และราคาวัสดุทำขอบกล่องราคา 12 บาทต่อตารางเมตร จงหาขนาดของกล่องที่ใช้เงินน้อยที่สุด

โจทย์ปัญหา 4.4

แก้วयेติทรงกระบอกสามารถใส่น้ำได้ 750 มิลลิลิตร จงหาขนาดของแก้วयेติที่จะใช้วัสดุในการทำน้อยที่สุด

โจทย์ปัญหา 4.5

ในการทำถาดเหล็ก วิธีการที่ใช้ในอุตสาหกรรมคือ เริ่มด้วยแผ่นเหล็กขนาดหนึ่ง ตัดมุมทั้งสี่มุมออกไปให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส แล้วพับขอบให้สนิทกันเป็นทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก ถ้าเริ่มต้นมีแผ่นเหล็กขนาด 15x10 นิ้ว และต้องการถาดเหล็กที่มีปริมาตรมากที่สุด ถาดเหล็กจะสูงเท่าใด

โจทย์ปัญหา 4.6

สมหมายต้องการสารภาพรักกับสมหญิง บ้านของทั้งคู่อยู่คนละฝั่งของแม่น้ำเจ้าพระยาที่กว้าง 200 เมตร สมชายอยู่ห่างจากฝั่งตรงข้ามบ้านสมหญิงอยู่ 600 เมตร ถ้าสมชายวิ่งด้วยความเร็ว 900 เมตรต่อชั่วโมง และว่ายน้ำด้วยความเร็ว 300 เมตรต่อชั่วโมง เขาควรว่ายน้ำเป็นระยะทางเท่าใดจึงจะถึงบ้านสมหญิงเร็วที่สุด